

Matematiikan perusmetodit/mat.

Harjoitus 7 syksy 2011

A osa:

1. Tiedetään, että $|x^2 - 4| < \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Tutki kuinka suuri/pieni voi olla epäyhtälön $0 < |x - 2| < \delta$ vakio $\delta > 0$, että $|x^2 - 4| < \frac{1}{2}$.
2. Perustele tarkasti miksi väite $\lim_{x \neq 0} x^2 + 2 = 0$ ei ole totta.
(**Vihje:** Tutki erotusta $|x^2 + 2|$ ja totea raja-arvon määritelmää käyttäen ettei arvoa saada mielivaltaisen pieneksi.)
3. Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$.
 - a) Osoita, että jos $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha a$.
 - b) Osoita, että $\lim |f(x) - a| = 0$ (ts. erotus $|f(x) - a|$ lähestyy nollaa).
4. Perustele yksikköympyrää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(**Vihje:** Luentomonisteen lause 4.2.5)

5. Laske seuraavat raja-arvot käyttämällä tehtävän 4 raja-arvoa:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 2x}$.

(**Vihje:** Mitä lähestyy arvo αx ($\alpha \in \mathbb{R}$) kun x lähestyy nollaa?)

6. Määrää raja-arvot

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{7x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(11x) \sin(10x) \sin(59x)}{x^3}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 8x}$,
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 1}{x^2}$, g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\cos x \sin x}$.

7. Määrää raja-arvot

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x}$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2}$,
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sin(x-1)}$.

B osa:

1. Olkoot $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$. Osoita, että

(a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vihje: Tee vasta oletus ja tutki erotusta $|b - a|$.

(b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$.

Vihje: Tutki erotusta

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab|$$

2. Määrä sellainen luku $a \in \mathbb{R}$, että raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 - 6x + 4}{x^2 - x - 2}$ on äärellisenä olemassa. Mikä tämä raja-arvo on?

3. Osoita tarkasti (määritelmään perustuen), että

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} -2x^3 = -\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$.

4. Määrä raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$, b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - 2}{|x - 4|}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 5x^2 - 1}{3x^6 + 8}$.

5. Määrä raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$,

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$.

6. Määrä toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ kun

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{kun } x \geq 2 \\ x + 2, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x > 2 \\ 0, & \text{kun } x = 2 \\ -x, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$