Funktion raja-arvo

Trigonometrisille funktioille raja-arvo saadaan suoraan sijoittamalla $x = x_0$, kunhan x_0 kuuluu kyseisen funktion määritysjoukkoon.

Lause 47

1. $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$
2. $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$
3. $\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0,$ *kun* $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
4. $\lim_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0,$ *kun* $x_0 \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

UNIVERSITY of OULU
OULUN YLIOPISTO

Funktion raja-arvo

Tärkein trigonometrinen raja-arvo on

Lause 48

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Esimerkki 49

Laske seuraavat raja-arvot

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{3x}$,

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$,

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(7x)}$,

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

e) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin 2x}{x-\pi}$.

Funktion toispuoleiset raja-arvo

Esimerkki 50

Olkoon $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$, $x \neq 1$. Tutki funktiota f, kun x lähestyy pistettä $x_0 = 1$.

Funktion toispuoleiset raja-arvo

Määritelmä 51

Oletetaan, että funktio f on määritelty pisteen x_0 oikealla puolella (vastaavasti vasemmalla) mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Funktiolla f on oikeanpuoleinen (vastaavasti vasemmanpuoleinen) raja-arvo $a \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0, mikäli jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

aina, kun $x_0 < x < x_0 + \delta$ (vastaavasti $x_0 - \delta < x < x_0$).

Funktion toispuoleiset raja-arvo

Merkintä

Jos funktiolla f on olemassa toispuoleiset raja-arvot pisteessä x_0, niin merkitään

$$a = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ tai } f(x) \to a \text{ kun } x \to x_0^+$$

tai vastaavasti

$$a = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ tai } f(x) \to a, \text{ kun } x \to x_0^-.$$

Lause 52

Oletetaan, että funktio f on määritelty pisteen x_0 aidossa ympäristössä. Tällöin funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0 jos ja vain jos oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja niillä on sama arvo.

Funktion raja-arvo

Esimerkki 53

Tutki funktiota $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ kun x lähestyy nollaa tai kun x kasvaa/vähenee rajaatta.

huom

Raja-arvon $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ käsite voidaan yleistää tapauksiin, joissa $x_0 = \pm\infty$ ja/tai $a = \pm\infty$. Tarkka määrittely käydään läpi luennolla.