

Derivaatta II

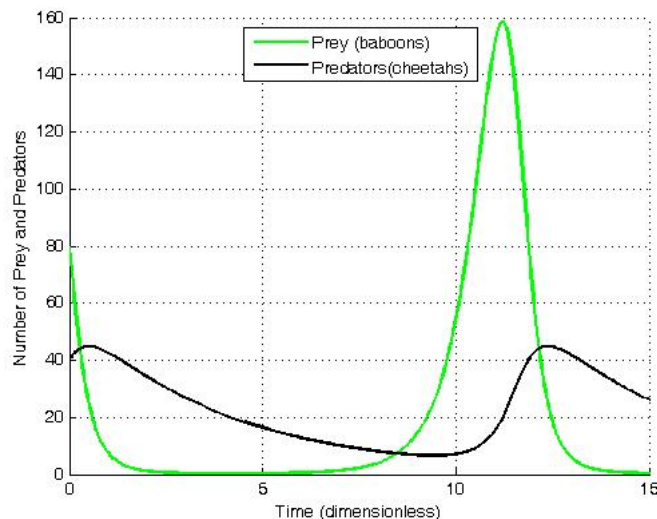
Tapio Hansson

Derivaatta II -kurssi

Tämä materiaali on suunnattu lukion koulukohtaisen syventävän kurssin Derivaatta II oppimateriaaliksi. Kurssilla kerrataan ja syvennetään valtakunnallisten kurssien MAA7 ja MAA8 sisältöjä, eli paneudutaan derivaattaan työkaluna ja syvennytään yleisimpien alkeisfunktioiden, kuten polynomien, eksponenttifunktioiden ja logaritmien derivointiin.

1 Analyysin työkalu

Matemaattisia malleja käytetään nykyisin lähes kaikilla tieteenaloilla. Mallilla yritetään kuvata monimutkaisia systeemejä paitsi fysiikassa ja teknillisillä aloilla, nykyisin myös biologiassa, taloustieteessä, lääketieteessä sekä monilla humanistisilla aloilla. Mallin avulla voidaan systemistä tai ilmiöstä saada tietoa ja tehdä siitä ennusteita tai pyrkiä parantamaan sen toimintaa. Loppupeleissä matemaattinen malli on funktio, jota tutkimalla voidaan saada paljon tietoa systemistä tai ilmiöstä, jota funktio kuvaa. Hieman yksinkertaista matemaattinen analyysi on matematiikan osa-alue, jossa tutkitaan funktioita ja niiden kulkua.



Kuva 1: Funktioilla voidaan mallintaa esimerkiksi eläinpopulaatioiden kokoja.

Kuva: public domain

Analyysissä käytetään monenlaisia työkaluja, kuten raja-arvoa, sarjakehitelmiä ja derivaattaa. Derivaatta kuvaa funktion muutosta, ja on siten erittäin tärkeä työkalu funk-

tion kulun tutkimisessa. Tietoa voidaan saada paitsi funktion muutosnopeudesta, myös esimerkiksi suurimmista ja pienimmistä arvoista.

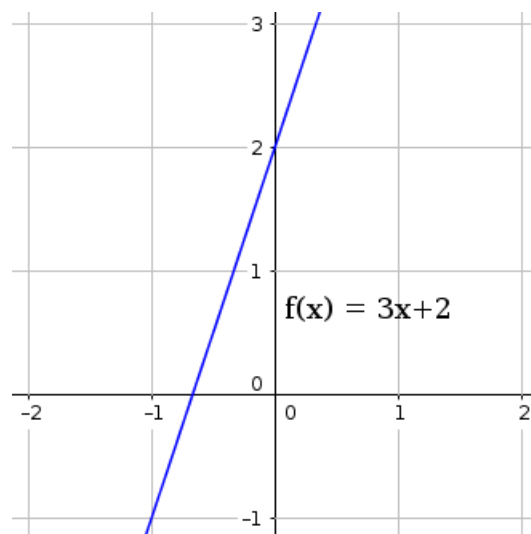
Useimmat ilmiöt ja systeemit ovat varsin monimutkaisia, jolloin niitä kuvaavat funktiotkin ovat yleensä varsin monimutkaisia. Esimerkiksi kuvan (1) funktiot on saatu ratkaisemalla peto-saaliseläin mallissa käytettävät Lotka-Volterran yhtälöt. Gebardien lukumäärä riippuu jollain tavalla paviaanien lukumäärästä ja päin vastoin. Funktiot näyttävät monimutkaiselta, ja sellaisia ne, kuten tosielämän ilmiöitä kuvaavat funktiot yleensä, ovatkin. Monimutkaiset funktiot koostuvat yleensä kuitenkin varsin yksinkertaisista osasista, joten hankalan funktion kulkua voi usein analysoida tutkimalla yksinkertaisempia osia erikseen.

2 Derivaatan määritelmä

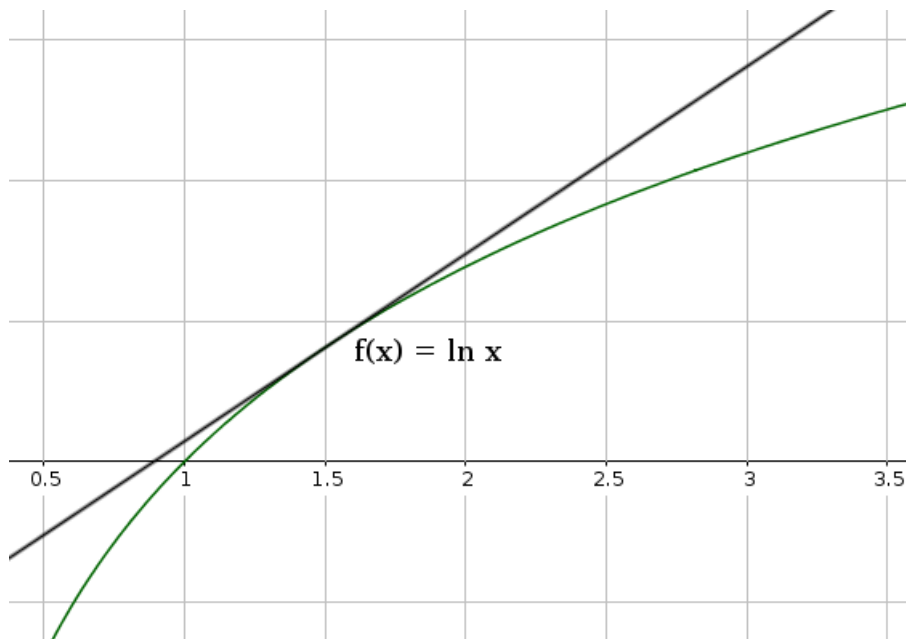
Derivaatta kuvaa funktion muutosnopeutta. Muutosnopeutta tutkiessa funktion kuvaajan ajattelusta on hyötyä, sillä kuvaajan jyrkkyys kertoo muutosnopeuden. Graafinen tarkastelu ei kuitenkaan useimmiten sellaisenaan riitä, eikä loppupeleissä ole aina kovin käytännöllistäkään. Tämän vuoksi on tarpeen tutustua myös tarkkaan analyttiseen määritelmään.

2.1 Derivaatta graafisesti

Ensimmäisen asteen polynomin, eli suoran, derivaatan arvo on suoran kulmakerroin, sillä kulmakerroin kuvaa suoran muutosnopeutta. Suoran tapauksessa muutosnopeus on kaikkialla sama, mutta useimmilla funktioilla näin ei tietenkään ole. Mitä jyrkemmin kuvaaja nousee tai laskee, sitä nopeammin funktion arvojen sanotaan muuttuvan. Funktion jyrkkyyttä voi arvioida silmämääräisesti hieman, mutta yksittäisessä kohdassa vallitsevaa jyrkkyyttä varten tarvitaan *tangenttisuora*, joka sivuaa tutkittavaa funktiota yhdessä pisteessä. Suora vain hipaisee funktion pintaa, ja siitä voidaan tutkia, miten funktion arvot ovat muuttumassa juuri tässä yhdessä pisteessä. Tämän tangenttisuoran kulmakerroin kuvaa myös funktion, jolle se on piirretty, muutosnopeutta kyseisessä kohdassa. Tangen-



Kuva 2: Suoran muutosnopeutta kuvaa kulmakerroin.



Kuva 3: Funktiolle $f(x) = \ln x$ kohtaan $x = 1.5$ piirretty tangenti.

tin kulmakerroin on tarkalleenottaen derivaatan graafinen määritelmä. Kuten funktion arvo, myös derivaatta määritellään pisteittäin.

Merkintä 2.1. Derivaatta

Funktion f derivaattaa merkitään f' ja derivaatan arvo kohdassa x on $f'(x)$.

Määritelmä 2.2. Derivaatan graafinen määritelmä

Funktion f derivaatan arvo kohdassa x on kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin.

2.2 Erotusosamäärän raja-arvo

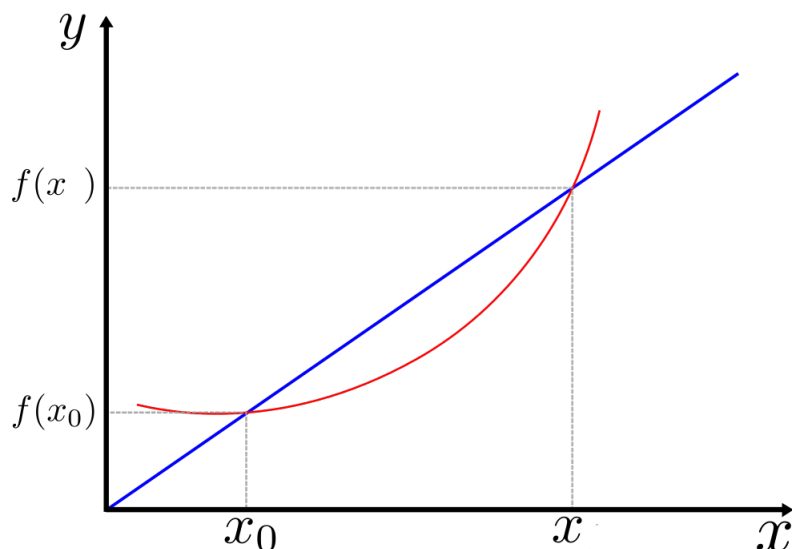
Algebrallinen tapa laskea tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin, eli derivaatan arvo tässä kohdassa, on niin sanottu erotusosamäärän raja-arvo. Erotusosamäärä on suure, joka kuvaa funktion keskimääräistä muutosta tietyllä välillä. Muuttujavälillä $[x_0, x]$ funktion f erotusosamäärä on lauseke

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

Osoittajassa oleva lauseke $f(x) - f(x_0)$ kertoo kuinka paljon funktion arvot ovat muuttuneet muuttujan arvojen muuttuessa kohdasta x_0 kohtaan x . Graafisesti erotusosamäärä on pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$ välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

Erotusosamäärä ei anna mitään tarkkaa tietoa siitä, miten funktio käyttäytyy välillä. Mitä lyhyempi väli tarkasteluun otetaan, sitä tarkemmin erotusosamäärä kuvaa funktion muutosta. Ottamalla erotusosamäärästä raja-arvo jossa x lähestyy kohtaa x_0 , saadaan muutosnopeudesta tarkka kuvaus. Tällöin pisteiden välille piirretty suora ei enää leikkaa funktiota, ja sekantista tulee tangenti, jonka kulmakerroin kertoo funktion muutosnopeuden, eli derivaatan arvon kohdassa $x = x_0$. Tästä saadaan algebrallinen määritelmä derivaatalle.

Määritelmä 2.3. Derivaatta



Kuva 4: Sekantti leikkaa funktion kahdesta kohdasta. Sen kulmakerroin kertoo funktion keskimääräisen muutoksen nopeuden leikkauspisteiden välissä.

kuva: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Afgeleide.svg>

Funktion f derivaatta kohdassa x_0 määritellään erotusosamäärän raja-arvona

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Toisinaan raja-arvojen laskemista helpottaa merkintätapa, jossa erotusta $x - x_0$ merkitään kirjaimella h . Tällöin määritelmä tulee muotoon

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3)$$

Esimerkki 1. Funktion $f(x) = x^2$ derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ saadaan laskemalla

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

Huomautus 1. Raja-arvojen laskeminen

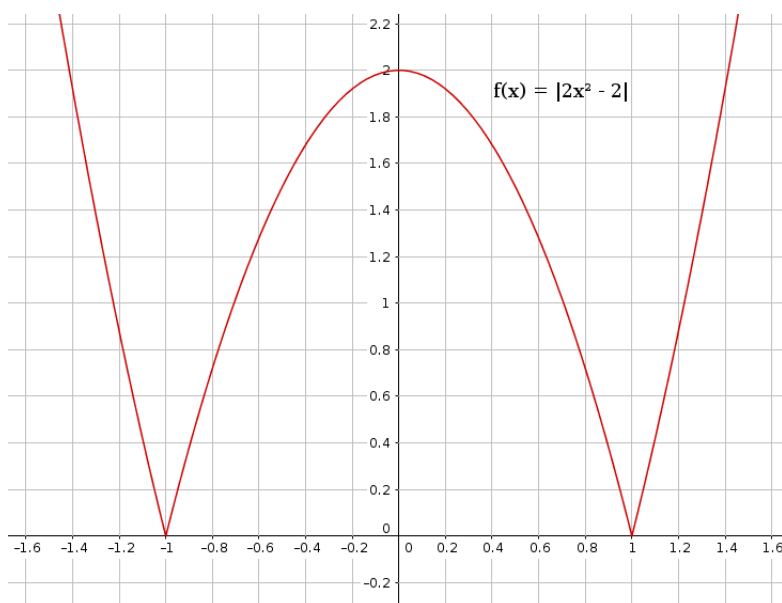
Vaikka lauseke ei olisi määritelty kohdassa jossa raja-arvo halutaan laskea, voidaan se tehdä, mikäli lauseke voidaan sieventämällä saattaa muotoon, joka on määritelty. On kuitenkin hyvä huomata, että alkuperäinen lauseke ei silti ole määritelty, vaikka sievennetyn lausekkeen arvo voidaankin helposti laskea.

3 Derivaatan olemassaolo

Derivaatan olemassaolo ei ole täysin itsestäänselvää, vaikka useimmiten vastaan tulevat funktiot ovatkin derivoituvia kaikkialla määrittelyjoukossaan. Ensimmäinen vaatimus derivaatan olemassaololle on, että funktio on jatkuva. Jos funktio ei ole tietyssä kohdassa

jatkuva, ei muutosnopeuttakaan tässä kohdassa voi määrittää. Jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto derivoituvuudelle.

Graafinen tulkinta kuvaa tilannetta hyvin. Jos kuvaajalle voi tiettyyn kohtaan piirtää tangentin, funktio on derivoituva tässä kohdassa. Käytännössä tämä vaatii, että kuvaajassa ei ole teräviä kulmia tai epäjatkuvuuksia. Useimmiten ongelmia aiheuttaa vain pieni joukko kohtia, ja derivaatta voidaankin määrittää kaikkialla muualla, paitsi ongelmakohdassa. Esimerkiksi itseisarvofunktioon tulee x -akselille terävä kulma, johon ei voi piirtää tangenttia.



Kuva 5: Funktion $f(x) = |2x^2 - 2|$ kuvaajaan tulee terävät kulmat kohtiin $x = -1$ ja $x = 1$. Näissä pisteissä derivaattaa ei voi määrittää, mutta kaikkialla muualla voi.

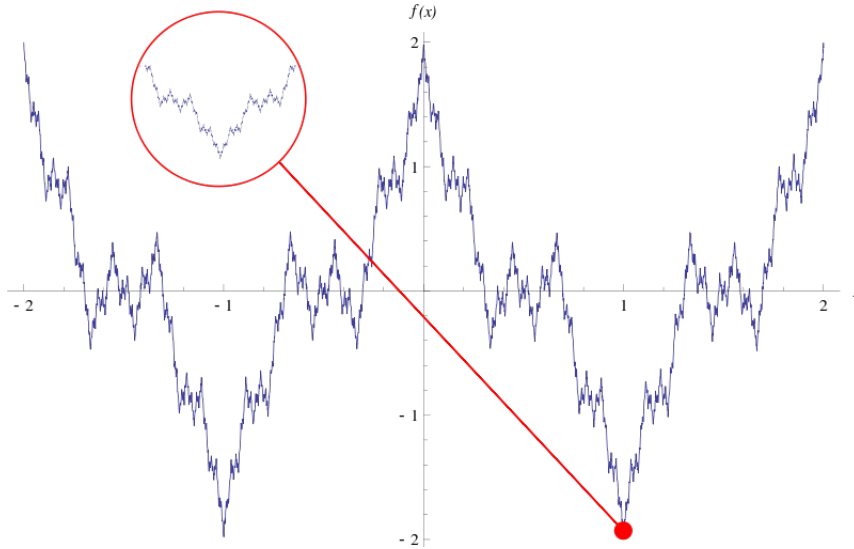
Vaikka kuvan 5 funktiolle ei voi määrittää derivaattaa kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$, on funktio kuitenkin jatkuva käyrä. 1800-luvulla on käyty enemmänkin keskustelua siitä, ovatko kaikki jatkuvat funktiot aina vähintäänkin yhdessä pisteessä derivoituvia. Vuosisadan puolivälissä löytyi useampia funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia, mutta eivät missään derivoituvia. Tunnetuin näistä funktioista on löytäjänsä mukaan nimetty Weierstrassin funktio.

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x) \quad 0 < a < 1, \quad b \text{ pariton}, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

Useimmat yleensä vastaan tulevat funktiot ovat kuitenkin aina derivoituvia. Esimerkiksi polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktiot ja trigonometriset funktiot ovat sekä jatkuvia että derivoituvia koko määrittelyjoukossaan. Sen sijaan tarkkana tulee olla, kun tutkittavana on paloittainmääriteltyjä funktioita tai itseisarvoa sisältäviä funktioita.

4 Derivaattafunktio

Derivaatta voidaan laskea jokaisessa pisteessä, jossa funktio on derivoituva, eli kaikkialla, missä kuvaajassa ei ole teräviä kulmia. Funktioa, joka laskee funktion f derivaatan arvoja sanotaan funktion f derivaattafunktioksi, ja sitä merkataan f' . Derivaattafunktio



Kuva 6: Weierstrassin funktio on kaikkialla jatkuva, muttei missään derivoituva. Kuvaaja on tavallaan äärettömän kulmikas, sillä jokaisessa pisteessä on kulma. Ei kannata edes yrittää ajatella tätä liian tarkasti.

kuva: public domain

on hyvin määritelty kaikkialla, missä alkuperäinen funktio on derivoituva. Periaatteessa derivaattafunktio ottaa argumentikseen muuttujan x ja funktion sääntö on laskea erotusosamäärän raja-arvo kyseisessä pisteessä. Käytännössä derivaattafunktiolle voidaan yleensä johtaa yksinkertaisempi lauseke, joka palauttaa aina funktion f kuvaajalle kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimen.

Derivaattafunktio voidaan laskea hyödyntäen erotusosamäärän raja-arvoa. Funktio saa muodon lausekkeesta

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4)$$

Esimerkki 2. Funktion $f(x) = 3x^2$ derivaattafunktio on

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2hx + h^2) - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h = 6x. \end{aligned}$$

Raja-arvojen laskeminen on kohtalaisen suoraviivaista polynomeille ja tavallisille potenssifunktioille, mutta vaatii usein varsin paljon lausekkeiden muokkaamista, sekä hieman edistyneempiä menetelmiä raja-arvojen laskemiseksi. Onneksi raja-arvoja ei useinkaan tarvitse laskea, kun osataan käyttää derivoimiskaavoja. Myös kaavat johdetaan yleensä raja-arvojen kautta, mutta niitä voidaan luonnollisesti käyttää suoraan sen tarkemmin raja-arvoja pohtimatta.

Esimerkki 3. Esimerkiksi eksponenttifunktion $f(x) = k^x$ derivoimissääntö voidaan johdattaa raja-arvona.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^{x+h} - k^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^x k^h - k^x}{h} = k^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^h - 1}{h} = k^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k^{0+h} - k^0}{h} = k^x f'(0).$$

Raja-arvo yleisessä kohdassa x muokkautuu siis raja-arvoksi kohdassa 0.

Toisinaan erilaisia kaavoja voidaan johtaa myös kun tunnetaan muiden funktioiden derivaattoja tai käyttämällä esimerkiksi yhdistetyn funktion derivaattaa. Esimerkiksi luonnollisen logaritmin derivaatta voidaan määrittää lähtemällä liikkeelle ainoastaan x :n derivaatasta:

$$1 = Dx = De^{\ln x} = e^{\ln x} D \ln x \Leftrightarrow D \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Yllä olevassa lausekkeessa on käytetty toista tapaa merkata derivaattaa, eli niin sanottua derivaattaoperaattoria D (tai $\frac{d}{dx}$). Derivaattaoperaattori on matemaattinen toimenpide, joka tarkoittaa derivaattafunktion muodostamista alkuperäisestä funktiosta. Operaattori ei sinänsä ota kantaa siihen, millä menetelmällä derivaatta lasketaan, eli voit käyttää joko derivoimiskaavoja tai erotusosamäärän raja-arvoa. Historiallisesti mielenkiintoinen seikka on, että kehittäessään differentiaalilaskentaa Newton ja Leibniz päätyivät molemmat hyvin samankaltaiseen tapaan, mutta käyttivät eri merkintöjä. Parivaljakon fyysikko, eli Newton käytti merkintänä isoa D -kirjainta, mikä on nykyisemmin jäänyt enemmän matemaatikoiden käyttöön yksiulotteisissa analyysissä. Matemaatikkona tunnetumpi Leibniz sensijaan käytti nykyisin enemmän fyysikoiden käytössä olevaa merkintää $\frac{d}{dx}$, jossa viivan alla ilmaistaan minkä muuttujan suhteen derivointi suoritetaan. Fysiikassa tarvitaan usein derivaattoja useampien kuin yhden muuttujan suhteen, jolloin on kätevää, että merkinnästä näkee suoraan minkä muuttujan suhteen derivointi milloinkin tehdään.

4.1 Derivoimiskaavoja

Käytännössä kaikille tavallisesti vastaan tuleville funktioille on olemassa derivoimiskaavoja, joilla derivaattafunktion voi helposti muodostaa. Usein tarvitaan lisäksi vielä tulon, osamäärän ja yhdistetyn funktion derivaattaa. Muutamia useimmin tarvittuja kaavoja:

- Potenssifunktio: $Dx^n = nx^{n-1}$
- Juurifunktiot: $D\sqrt[n]{x} = Dx^{1/n} = \frac{1}{n}x^{(1-n)/n}$
- Eksponenttifunktiot: $Dk^x = k^x \ln k$
- Neperin luku kantalukuna: $De^x = e^x$
- Luonnollinen logaritmi: $D \ln x = \frac{1}{x}$
- Yleinen logaritmi: $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- Trigonometriset funktiot ja arkusfunktiot:
 - $D \sin x = \cos x$
 - $D \cos x = -\sin x$
 - $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$
 - $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 - $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

4.2 Yhdistetyn funktion derivaatta

Suurin osa hyödyllisistä funktioista on jollain tapaa yhdistettyjä funktioita. Yhdistetty funktio tarkoittaa funktiota, jonka sisällä on toinen funktio. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

on yhdistetty funktio, koska se koostuu neliöjuurifunktiosta, sekä funktiosta $1+x$. Yhdistettyä funktiota merkitään $g \circ f$, jossa g on niinsanottu ulkofunktio ja f sisäfunktio. Yhdistetyn funktion arvot lasketaan sisäkkäin:

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Yllä olleessa esimerkissä $\sqrt{1+x}$ neliöjuuri on ulkofunktio ja $1+x$ sisäfunktio. Tavallisia alkeisfunktioita ja polynomeja on helppo derivoida kaavalla, mutta monesti vastaan tulee yhdistettyjä funktioita, joille ei kaikille voi olla omaa kaavaansa. Tämän vuoksi yleinen yhdistetyn funktion derivointisääntö on usein erityisen käytännöllinen.

$$Dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x) \quad (5)$$

Esimerkki 4. Derivoidaan funktio $(x^2 + 3)^3$. Merkitään $g(x) = x^3$ ja $f(x) = x^2 + 3$. Derivoitavana näillä merkinnöillä on siis $g \circ f$. Käyttäen kaavaa (5) saadaan

$$Dg(f(x)) = 3(x^2 + 3)^2 \cdot D(x^2 + 3) = 3(x^2 + 3)^2 \cdot 2x$$

Esimerkki 5. Derivoidaan funktio e^{3x^2-x} . Nyt merkitään ulkofunktiota $g(x) = e^x$ ja sisäfunktiota $f(x) = 3x^2 - x$. Derivoidaan funktio $g \circ f$ yhdistetyn funktion kaavalla.

$$De^{3x^2-x} = e^{3x^2-x} \cdot D(3x^2 - x) = e^{3x^2-x} \cdot (6x - 1)$$

Tätä yhdistetyn funktion derivaattaa kutsutaan itseasiassa *derivoinnin ketjusäännök-si*. Ketjusääntöä voi periaatteessa jatkaa vieläkin pidemmälle. Esimerkiksi kolmen sisäkäisen funktion derivaatta voidaan laskea ketjusäännöllä:

$$Dh(g(f(x))) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

4.3 Tulon ja osamäärän derivaatta

Usein tulee vastaan tilanteita, jolloin on tarpeen derivoida kahden erillisen funktion tuloa tai osamäärää. Näille löytyy myös omat derivoimissääntönsä. Tulon derivaatta lasketaan

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (6)$$

Esimerkki 6. Derivoidaan tulonderivaatalla funktio x^2e^{2x} . Kaavan 6 merkinnöissä funktiona f on siis x^2 ja funktiona g vastaavasti e^{2x} . Käyttäen kaavaa saadaan

$$Dx^2e^{2x} = 2xe^{2x} + x^2e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}(x^2 + x)$$

Osamäärän, eli jakolaskutoimituksen derivointiin on myös kaavansa.

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (7)$$

Verrattuna tulon derivaattaan, on osamäärää derivoitaessa kiinnitettävä huomiota siihen, kummin päin funktiot ovat, sillä miinusmerkki tulee vain toiselle termille.

Osamäärän derivaattoja voi itseasiassa laskea myös käyttämällä tulon derivaattaa ja muuttamalla nimittäjän eksponentiksi -1 . Tämä saattaa toisinaan helpottaa derivaatan laskemista, ja vastaavasti toisinaan ei.

$$D\frac{f}{g} = D(fg^{-1}). \quad (8)$$

5 Funktion kulku ja ääriarvot

Eräs derivaatan merkittävimpää sovelluksia on funktion kulun tutkiminen. Derivaatan merkki kertoo funktion muutosnopeuden suunnan, eli onko funktion arvo kasvamassa vai vähenemässä milläkin hetkellä. Jatkuva ja derivoituva funktio voi vaihtaa kulkusuuntaansa ainoastaan derivaatan nollakohdissa.

5.1 Funktion kulku

Graafisesti tarkasteltuna funktion sanotaan olevan *kasvava*, jos sen kuvaaja kulkee vasemmalta oikealle kuljettaessa ylöspäin, eli funktion arvot kasvavat muuttujan arvojen kasvaessa. Vastaavasti funktio on *vähenevä*, jos funktion arvot pienenevät muuttujan arvojen kasvaessa, eli kuvaaja kulkee alaspäin. Jos funktio on tietyllä lukuvälillä ainoastaan kasvava tai ainoastaan vähenevä, sen sanotaan olevan *monotoninen*.

Tutkimalla derivaatan merkkiä voidaan selvittää algebrallisesti, milloin funktio on kasvava ja milloin vähenevä.

Määritelmä 5.1. Funktio f on lukuvälillä kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ koko välillä.

Määritelmä 5.2. Funktio f on lukuvälillä vähenevä, jos $f'(x) \leq 0$ koko välillä.

Jos edellä olevia määritelmiä tarkastellaan erikoistapauksessa, kuten esimerkiksi vakiofunktion tapauksessa, tullaan siihen lopputulokseen, että esimerkiksi vakiofunktio on samaan aikaan sekä kasvava että vähenevä. Näin ollen toisinaan tarvitaan hieman yksikäsittisempiä termejä, eli käsitteitä *aidosti kasvava* ja *aidosti vähenevä*.

Määritelmä 5.3. Funktio f on lukuvälillä aidosti kasvava, jos $f'(x) > 0$ kaikkialla lukuvälillä ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä erillisissä pisteissä.

Määritelmä 5.4. Funktio f on lukuvälillä aidosti vähenevä, jos $f'(x) < 0$ kaikkialla lukuvälillä ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä erillisissä pisteissä.

Tässä kohtaa herää helposti kysymys, miksi derivaatan ei vaadita olemaan aidosti suurempaa tai pienempää kuin nolla, vaan sille sallitaan yksittäisiä nollakohtia. Syy tähän on funktiolla mahdollisesti olevat terassikohdat, joissa funktion derivaatta saa hetkellisesti arvon nolla, mutta kyseisen nolla kohdan molemmilla puolilla muutos on samaan suuntaan.

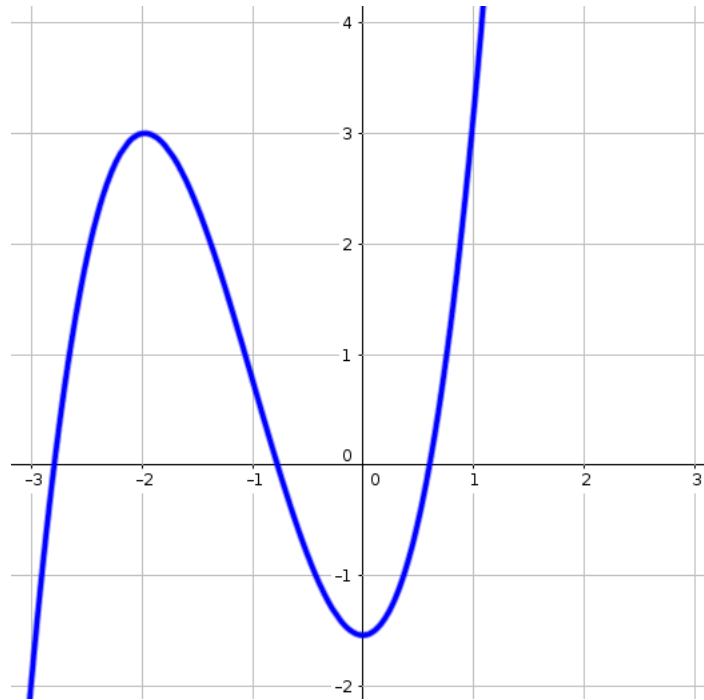
Esimerkki 7. Milloin funktio $f(x) = 2x^2 - 3x$ on aidosti kasvava?

Etsitään derivaatan nollakohdat, ja tutkitaan merkkikaavion avulla, milloin derivaatta saa positiivisia arvoja.

$$f'(x) = 4x - 3, f'(x) = 0, \text{ kun } 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/4$$

	$x < 3/4$	$x > 3/4$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

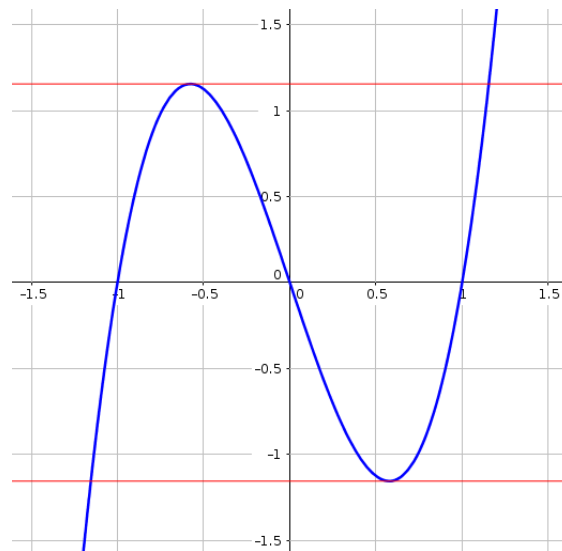
Näin ollen funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 0$.



Kuva 7: Kuvan funktio on aidosti kasvava väleillä $[-\infty, -2]$ ja $[0, \infty]$ sekä aidosti vähenevä välillä $[-2, 0]$.

5.2 Ääriarvot

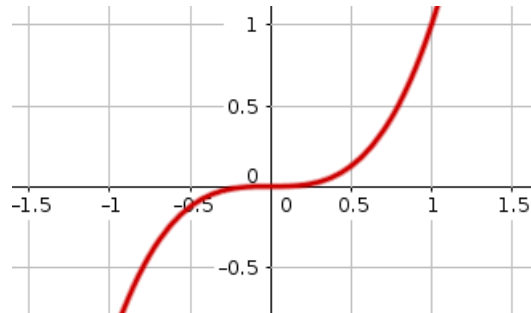
Kohtia joissa funktion kuvaajassa on huippu tai kuopan pohja kutsutaan funktion ääriarvoiksi. Ääriarvot voivat olla siis joko maksimeja tai minimejä. Toisinaan kiinnostavaa on tarkastella paikallisia, eli *lokaaleja* ääriarvoja, mutta usein on tarpeen etsiä funktion suurimpia tai pienimpiä arvoja, eli *globaaleja* ääriarvoja.



Kuva 8: Funktion ääriarvot ovat kuvaajan huippuja tai pohjia. Näihin kohtiin piirretyt tangentit ovat vaakasuoria, eli niiden kulmakerroin on 0. Molemmat kuvan ääriarvot ovat vain lokaaleja, sillä funktio saa muualla sekä suurempia, että pienempiä arvoja.

Jatkuvan funktion ääriarvot löydetään aina derivaatan nollakohdista, joten ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$ saadaan ratkaisuna ääriarvokohdat. Ääriarvon laatu tulee tarkas-

taa erikseen määrittämällä derivaattafunktion kulkukaavio. Jos funktio muuttuu vähenevästä kasvavaksi ääriarvokohdassa, on kyseessä minimi ja jos funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi on kyseessä maksimi. On myös mahdollista, että derivaatan nollakohdassa ei ole ääriarvoa. Tällöin on kyse niin sanotusta terrassikohdasta (oululaisittain "patio-paikka"), jolloin funktion derivaatta saa hetkellisesti arvon nolla, mutta funktio jatkaa kulkuaan samaan suuntaan kuin ennen derivaatan nollakohtaa.

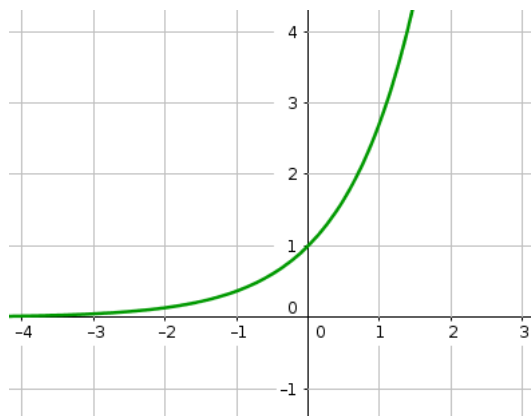


Kuva 9: Funktiolla $f(x) = x^3$ on terrassikohta kohdassa $x = 0$.

Funktion globaaleja maksimeja ja minimeja kutsutaan myös funktion suurimmiksi ja pienimmiksi arvoiksi. Tällöin funktiolla on olemassa jokin suurin tai pienin arvo, suurempia tai pienempiä arvoja se ei saa missään muualla. Osalla funktioista ei ole olemassa suurinta tai pienintä arvoa, mutta tarkasteltaessa suljettua väliä, sellaiset voidaan aina löytää.

Polynomifunktiolle on olemassa yksinkertaiset säännöt, joilla voidaan tutkia onko funktiolla olemassa suurin tai pienin arvo vai ei.

- Jos polynomien asteluku on pariton, sillä ei ole suurinta tai pienintä arvoa.
- Jos polynomien asteluku on parillinen, sillä on suurin tai pienin arvo.
 - Jos parillista astelukua olevan polynomien korkeimman asteen merkki on positiivinen, polynomilla on pienin arvo, mutta ei suurinta arvoa.
 - Jos parillista astelukua olevan polynomien korkeimman asteen merkki on negatiivinen, polynomilla on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.



Kuva 10: Funktiolla e^x ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, sillä kun x kasvaa positiivisella akselilla, e^x lähestyy ääretöntä. Negatiivisella akselilla funktion arvot lähestyvät nollaa sitä kuitenkaan koskaan saavuttamatta.

Trigonometrisistä funktioista kosini ja sini saavat suurimmaksi arvokseen 1 ja pienimmäksi arvokseen -1. Eksponenttifunktiolla e^x ei ole suurinta eikä pienintä arvoa siitä huolimatta, että se ei koskaan saa negatiivisia arvoja. Funktion e^x sanotaan olevan *alhaalta rajoitettu*, sillä se ei saa koskaan tiettyä arvoa pienempiä arvoja. Yksittäistä pienintä arvoa sille ei kuitenkaan voi määrittää, sillä aina voidaan kulkea x -akselia hieman pidemmälle vasempaan ja sieltä löytyy aina pienempiä ja pienempiä arvoja.

Usein varsinkin soveltavissa tehtävissä tutkitaan jotain suljettua väliä, jolloin kaikilta funktioilta voidaan löytää suurin ja pienin arvo, kunhan ne on määritelty kyseisellä välillä. Funktion f suurimpien ja pienimpien arvojen löytämiseen suljetulta väliltä $[a, b]$ voidaan käyttää seuraavaa algoritmia:

1. Derivoi funktio
2. Määritä derivaattafunktion f' nollakohdat, sekä mahdolliset kohdat, joissa derivaatta ei ole määritelty, ja valitse niistä ne, jotka ovat välillä $[a, b]$.
3. Laske funktion arvo valituissa derivaatan nollakohdissa sekä välin päätepisteissä ja valitse saamistasi arvoista suurin ja pienin.

5.3 Soveltavia ääriarvotehtäviä

Funktioiden tutkimuksessa ääriarvot ovat usein mielenkiinnon kohteena. Ääriarvoja voidaan soveltaa optimointiin, eli etsitään optimaalisin mahdollinen tapa käyttää esimerkiksi rahaa tai materiaaleja. Soveltaviin tehtäviin on usein hankala antaa täysin suoraviivaisia ohjeita, mutta ääriarvotehtävien ratkaiseminen etenee yleensä varsin selkeän kaavan mukaan.

Tyypillisesti ääriarvotehtävässä pyydetään etsimään pienin tai suurin mahdollinen arvo suljetulla välillä. Lisäksi usein mukaan tulee jokin rajoittava tekijä, niin sanottu reunaehto, joka määrää missä rajoissa suurin tai pienin arvo tulee etsiä. Ääriarvoja sovelletaan esimerkiksi jonkin kappaleen tai alueen alueen pinta-alan tai tilavuuden maksimointiseksi, mutta periaatteessa sovellustehtävissä on vain mielikuvitus rajana. Maksimointi ja minimointitehtäviin voi yrittää soveltaa seuraavanlaista sapluunaa:

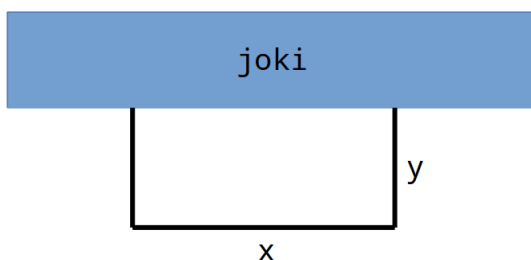
1. Mieti tarkkaan mikä on se suure, jonka ääriarvoa etsitään.
2. Muodosta funktio, joka kuvaa kyseistä suuretta. Tässä vaiheessa mukana on usein enemmän kuin yksi tuntematon.
3. Sovella reunaehtoa, ja sijoita sen avulla funktion tuntematon muuttuja. Reunaehdot täytyy löytää niin monta, että funktiosta saadaan yhden muuttujan funktio.
4. Derivoi funktio ja etsi derivaattafunktion nollakohdat.
5. Laske funktion arvo derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä. Valitse suurin ja pienin arvo.

Sovelletaan edellistä rakennetta esimerkkiin.

Esimerkki 8. Joen rantaan rakennettavan suorakulmion muotoisen aitauksen kolmeen sivuun on käytettävissä 36 metriä aitaa. Kuinka aitauksen mitat tulee valita, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

Ratkaisu: Edellisen listan kohtien mukaan:

1. Tehtävänä on maksimoida suorakulmion pinta-ala.
2. Suorakulmion pinta-ala lasketaan kanta kertaa korkeus. Merkitään kantaa x :llä ja korkeutta y :llä, jolloin pinta-alafunktio on $A = xy$.



3. Reunaehtona on, että aitaa on käytettävissä 36 metriä. Tuo 36 metriä koostuu yhdestä kannasta ja kahdesta korkeudesta, joten tästä saadaan yhtälö: $x + 2y = 36$. Yhtälöstä voi ratkaista kumman tahansa muuttujan. Ratkaistaan $x = 36 - 2y$ ja sijoitetaan se pinta-alan lausekkeeseen. Nyt pinta-ala on enää y :n funktio:

$$A(y) = (36 - 2y)y = -2y^2 + 36y$$

4. Pinta-alan derivaatta on

$$A'(y) = -4y + 36,$$

jonka ainoa nollakohta on

$$-4y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{36}{4} = 9.$$

5. Mahdolliset y : arvojen ääripäät ovat 0 ja 36 metriä, jotka ovat samalla välin päätepisteet. Päätepisteillä suorakulmion pinta-ala on nolla, joten suurin pinta-ala on derivaatan nollakohdassa $y = 9$. Tällöin $x = 36 - 2 * 9 = 18$.

Vastaus: Suorakulmion joen suuntainen pituus on 18 metriä ja lyhyemmät sivut 9 metriä.

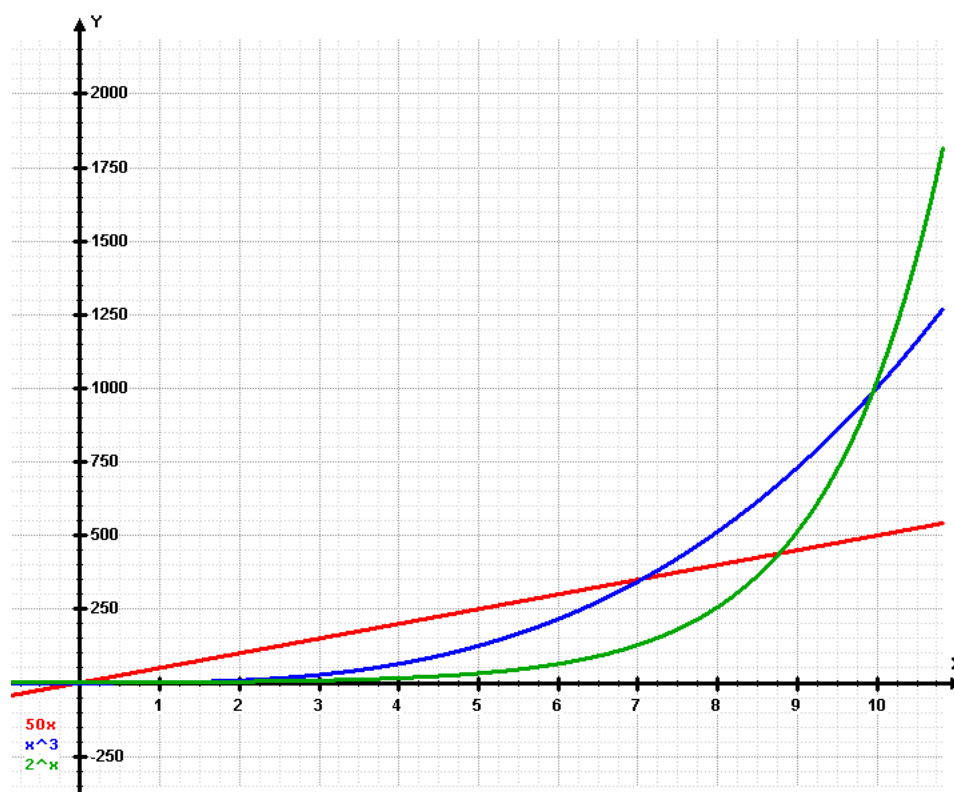
6 Matemaattisia malleja

Matemaattisella mallintamisella tarkoitetaan matemaattisen lausekkeen etsimistä kuvaamaan jotain ilmiötä. Lausekkeen etsimiseen voidaan käyttää esimerkiksi havaintopisteitä, joihin voidaan *sovittaa* funktio. Toinen vaihtoehto on käyttää jotain tietoa, kuten kasvutai vähenemisprosenttia ja muodostaa lauseke sen perusteella. Usein käyttökelpoinen ja yksinkertainen malli on lineaarinen malli, jossa ilmiötä kuvaa suoran yhtälö. Tällaisen ilmiön kuvaamiseen riittää kaksi havaintopistettä, joiden kautta suora voidaan piirtää. Useamman pisteen joukkoon voidaan muodostaa suora käyttämällä esimerkiksi pienimmän neliosumman menetelmää. Suorat ovat derivoinnin kannalta hieman tylsiä, joten seuraavaksi paneudutaan hieman mielenkiintoisempiin malleihin. Yksinkertaiset funktiot harvoin kuvaavat hyvin monimutkaisia prosesseja, mutta tiettyihin tilanteisiin esimerkiksi eksponenttifunktio sopii erinomaisesti.

6.1 Eksponenttifunktio matemaattisena mallina

Jos ilmiön tai asian muutosnopeus riippuu asian senhetkisestä määrästä, voidaan ilmiötä kuvata eksponenttifunktiolla. Tyypillisiä esimerkkejä eksponentiaalisesta kasvusta on esimerkiksi tilille maksettava korko tai eliölajien lisääntyminen. Tavallisimmat esimerkit eksponentiaalisesta vähenemisestä ovat radioaktiivinen hajoaminen, lainan maksu ja lääkeaineen pitoisuus kehossa.

Eksponentiaalista kasvua käytetään puhekielessä usein synonyyminä erittäin nopealle kasvulle, mutta todellisuudessa eksponentiaalinen kasvu tai väheneminen voi olla myös varsin hidasta. Kasvu riippuu muutoskertoimesta ja siitä, kauanko kasvu jatkuu. Eksponentiaalinen kasvu nimittäin kiihtyy ajan myötä, minkä vuoksi kasvu usein on hyvin nopeaa. Vastaavasti eksponentiaalinen väheneminen hidastuu ajan myötä. Tämä aiheuttaa esimerkiksi sen, että radioaktiivinen jäte pysyy hieman aktiivisena erittäin pitkään, vaikka voimakas aktiivisuus katoaakin hyvin nopeasti.



Kuva 11: Kahta suuremmat kantaluvut johtavat hyvin nopeaan eksponentiaaliseen kasvuun (vihreä). Lineaarinen kasvu (punainen) jää lopulta aina eksponentiaalisen ja kuutiollisen (sininen) jalkoihin. Eksponentiaalinen kasvu ohittaa lopulta myös minkä tahansa polynomisen (esim. kuutiollinen) kasvun. Mitä kauemmin kasvu jatkuu, sitä suuremmaksi ero käy.

Yksinkertaiset eksponenttifunktiot toimivat mallina käytännössä aina samalla tavalla. Suureen määrää kuvaava yhtälö on muotoa

$$A = A_0 k^x, \quad (9)$$

missä A on suureen uusi määrä, A_0 alkuperäinen määrä, k muutoskerroin ja x muutoskertojen lukumäärä. Usein kasvu riippuu ajasta, jolloin muuttujana käytetään x :n tilalla t :tä.

Esimerkki 9. Tilille talletetaan 5000 euroa ja sille maksetaan 1,5% vuosittaista korkoa. Kun tilille ei tehdä muita siirtoja tai nostoja, sillä olevan rahan määrää A kuvaa yhtälö

$$A = 5000 \cdot 1,015^t,$$

missä t on talletuksesta kulunut aika vuosina.

Muutoskerroin voidaan määrittää, jos tiedetään montako prosenttia muutos on kullakin muutoskerralla. Muutoskerroin saadaan vastaamalla kysymykseen millä luvulla luku pitää kertoa, jotta se vähenee p prosenttia tai kasvaa p prosenttia. Jos luku a kasvaa $p\%$ se tarkoittaa, että uusi luku on $a + \frac{p}{100}a = (1 + \frac{p}{100})a$, eli muutoskerroin on $1 + \frac{p}{100}$. Toisin sanoen muutoskerroin saadaan siis muuttamalla prosenttiluku desimaaliluvuksi ja lisäämällä se ykköseeseen. Vastaavasti jos luku vähenee $p\%$ saadaan muutoskerroin muuttamalla p desimaaliluvuksi ja vähentämällä se ykköseestä.

Esimerkki 10. Edellisen esimerkin tilille maksettiin korkoa 1,5 %. Tällöin uusi tilin saldo lasketaan kertomalla vanha saldo luvulla $1 + \frac{1,5}{100} = 1,015$.

Esimerkki 11. Vaateliike asetti erän vaatteita 30% alennukseen. Tällöin uusi hinta lasketaan kertomalla vanha hinta luvulla $1 - \frac{30}{100} = 0,7$.

Koska eksponentiaalisessa muutoksessa muutosnopeus riippuu määrästä, on muutoskerroin mahdollista määrittää myös jos tunnetaan montako muutoskertaa tarvitaan esimerkiksi arvon puolittumiseen tai kaksinkertaistumiseen. Tällöin voidaan hyödyntää yhtälöä (9) ja laskea k kun tunnetaan uusi arvo, alkuperäinen arvo ja muutoskertojen lukumäärä.

Esimerkki 12. Niin sanotun radiojodin eli jodin isotoopin 131 puoliintumisaika $T_{1/2} = 8,07$ päivää. Selvitetään montako prosenttia jodista hajoaa päivässä. Merkitään jodin määrää suurella A . Jodin määrä puolittuu puoliintumisajassa, joten muutoskerroin k voidaan ratkaista yhtälöstä $A = A_0 k^t$

$$\begin{aligned} A &= A_0 k^t \\ \frac{1}{2}A_0 &= A_0 k^{T_{1/2}} \\ \frac{1}{2} &= k^{8,07} \\ k &= \sqrt[8,07]{0,5} = 0,91769348 \approx 0,918 \end{aligned}$$

Eli jodin määrää kuvaavaan eksponenttiyhtälöön saadaan muutoskertoimeksi 0,918 kun muutosten lukumäärä ilmoitetaan päivinä.

6.2 Polynomifunktio mallina

Kun polynomien astelukua kasvatetaan, voidaan sillä approksimoida mitä tahansa funktiota. Niinpä polynomien sovittaminen pistejoukkoon on eräs suosittu tapa etsiä matemaattista mallia, vaikka mitään selkeää perustetta tietynlaisen käyttäytymisen arvioimiseen ei ole. Tällaista menetelmää kutsutaan sarjakehitelmäksi. Toisinaan polynomifunktio saattaa kuvata ilmiötä sellaisenaankin. Tästä esimerkkinä toimii mm. tasaisesti kiihtyvän liikkeen kuvaus.

6.2.1 Tasainen ja tasaisesti kiihtyvä liike

Fysiikka on ala, joka perustuu tänä päivänä lähes kokonaan matemaattiseen mallintamiseen. Eräs ensimmäisiä malleja jotka tulevat vastaan ovat mallit tasaiselle ja tasaisesti kiihtyvälle liikkeelle. Suuret matka, nopeus ja kiihtyvyys liittyvät toisiinsa tiukasti derivaatan kautta.

Tasaisessa liikkeessä kappaleen, esimerkiksi auton tai junan, nopeus pysyy vakiona. Vakionopeus tarkoittaa sitä, että kappaleen paikka muuttuu jokaisena saman mittaisena aikavälinä saman verran. Näin ollen kappaleen paikan muutosnopeus, eli derivaatta, on vakiofunktio, ja kuten arvata saattaa paikan derivaatta on kappaleen nopeus.

Vastaavasti kappaleen nopeuden muutosta kuvaava suure on kiihtyvyys. Kun nopeus muuttuu tasaisesti, on sen muutosta kuvaava funktio vakio, eli kappaleen kiihtyvyys on vakio. Kiihtyvyys saadaan nopeuden derivaatasta. Fysiikassa nopeus määritetään usein paikan kuvaajasta ja kiihtyvyys nopeuden kuvaajasta graafisesti derivoimalla, mutta mikäli lausekkeet tunnetaan tarkasti, voidaan derivointi suorittaa yhtäläillä analyttisesti. Koska nopeus on paikan derivaatta ja kiihtyvyys nopeuden, on kiihtyvyys tällöin paikan toinen derivaatta ajan suhteen.

$$\begin{aligned}v(t) &= x'(t) \\ a(t) &= v'(t) = x''(t)\end{aligned}\tag{10}$$

Tasaisessa nopeudessa kappaleen nopeus on vakio, joten kappaleen paikkaa kuvaava lauseke on ensimmäisen asteen polynomi (huom! muuttujana t).

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Termi x_0 kuvaa lähtöpaikkaa, ja se on matemaattisesti niin sanottu *integroimisvakio*, sillä nopeuden ollessa paikan derivaatta, on paikka tällöin nopeuden integraalifunktio, mutta siihen paneuduttakoon tarkemmin muilla kursseilla.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen nopeuden derivaatta on vakio, eli vastaavasti nopeutta kuvaava lauseke on ensimmäisen asteen polynomi

$$v(t) = v_0 + at.$$

Integroimalla tätä lauseketta edelleen saadaan paikalle lauseke

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

Osoitetaan derivoimalla tämän paikkansapitävyys, integroimisen ollessa tämän kurssin tähtäimen ulkopuolella.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= x'(t) = v_0 + 2 \cdot \frac{1}{2}at = v_0 + at \\ a(t) &= x''(t) = a.\end{aligned}$$

Tasaisen liikkeen malli ajan suhteen on ensimmäisen asteen polynomi ja tasaisesti muuttuvan liikkeen malli toisen asteen polynomi. Molemmat mallit toimivat sillä oletuksella, että liike on täydellisen tasaista tai tasaisesti kiihtyvää, mikä on todellisessa maailmassa varsin hankala toteuttaa. Mallit toimivat kuitenkin hyvin usein riittävällä tarkkuudella ja niitä käytetään paljon, koska monimutkaisemmat mallit vaativat paljon lisää tietoa tarkasteltavasta systemistä.

6.2.2 Taylorin polynomi

Käytännön laskuja varten monet funktiot ovat monimutkaisia. Esimerkiksi trigonometristen funktioiden arvojen laskeminen laskimella ei ole kovin yksinkertaista, sillä laskimet ja tietokoneet perustuvat ykkösten ja nollien käsittelyyn. Tätä varten monia funktioita approksimoidaan usein sarjakehitelmällä, mikä mahdollistaa arvojen laskemisen pelkkää kerto- ja yhteenlaskua käyttäen. Sarjakehitelmässä pyritään muodostamaan polynomi, joka on mahdollisimman samanmuotoinen kuin tarkasteltavana oleva funktio. Periaatteessa polynomilla voidaan approksimoida funktiota äärettömän tarkasti, mutta käytännössä käytettävissä oleva laskentateho rajoittaa laskun tarkkuutta.

Tyypillinen approksimaatio on niin sanottu Taylorin polynomi. Taylorin polynomi muodostetaan kaavalla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (11)$$

Tällöin sanotaan Taylorin polynomin olevan *kehitetty* kohdan $x = a$ ympäristössä. Yleisimmin vastaan tulee erikoistapaus jossa $a = 0$. Tätä kutsutaan Maclaurinin polynomiksi ja se on siis muotota

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (12)$$

Esimerkki 13. Muutamien funktioiden Maclaurinin polynomien ensimmäisiä termejä:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

7 Useamman muuttujan funktiot

Kun funktion arvot riippuvat useammasta kuin yhdestä muuttujasta, on niiden käyttäytymisen hahmottaminen haastavampaa. Muutosnopeutta ei voi selvittää yksikäsitteisesti, vaan se tulee tarkastella jokaisen muuttujan suhteen erikseen. Otetaan käyttöön niin sanottu *osittaisderivaatta*. Osittaisderivaatan avulla tutkitaan, miten useamman muuttujan funktion arvot muuttuvat tietyn muuttujan arvojen muuttuessa.

Teknisesti osittaisderivointi ei eroa mitenkään tavallisesta derivoinnista, sillä derivointi suoritetaan aina vain yhden muuttujan suhteen muita pidettäessä tällöin vakiona. Kaikkien muuttujien luonne on kuitenkin syytä pitää aina mielessä. Osittaisderivaattaa merkitään symbolilla ∂ ja koska muuttujia on useampia, on tapana käyttää Leibnizin merkintää ja merkitä esimerkiksi osittaisderivaatta x :n suhteen $\frac{\partial}{\partial x}$.

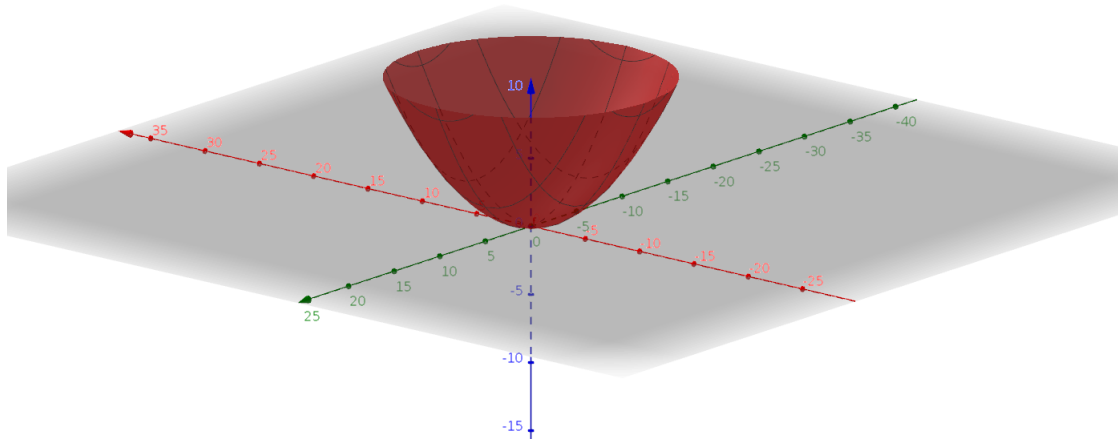
Esimerkki 14. Olkoon funktio $f(x, y) = x^2y - xy^3$. Tällöin funktion osittaisderivaatta x :n suhteen on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2xy - y^3$$

ja vastaavasti y :n suhteen

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^2 - 3xy^2.$$

Yhden muuttujan funktiot voidaan esittää kaksiulotteisessa koordinaatistossa, mutta kahden muuttujan funktioille tarvitaan funktion arvolle kolmas ulottuvuus.



Kuva 12: Kahden muuttujan funktion $f(x, y) = 0,1x^2 + 0,1y^2$ kuvaaja on symmetrisen kulhon muotoinen.

7.1 Gradientti

Tyypillisen derivaatan vastine useampiulotteisessa tapauksessa on *gradientti*. Vastaavalla tavalla kuin derivaatta kuvaa käyrän jyrkkyyttä, eli tangentin kulmakerrointa, gradientti kuvaa edelleen pinnan jyrkkyyttä. Ero perinteiseen derivaattaan on se, että gradientti sisältää tiedon myös suunnasta, johon funktion arvot muuttuvat nopeimmin. Suunnan tullessa peliin mukaan onkin jo selvää, että gradientti on itseasiassa vektori, joka osoittaa pinnan nopeimman muutoksen suuntaan.

Eräs havainnollinen esimerkki on vuori, jonka korkeus pisteessä (x, y) määräytyy funktiosta $h(x, y)$. Tällöin gradienttivektori tietyssä pisteessä osoittaa jyrkimmän rinteen suunnan. Vektorin pituus kertoo kuinka jyrkkä rinne kyseisessä kohdassa on. Gradienttia merkitään käyttämällä *nabla*-symbolia ∇ . Funktion h gradientti merkittäisiin siis $\nabla h(x, y)$.

Kolmen muuttujan funktion $f(x, y, z)$ gradientti voidaan laskea osittaisderivaattojen avulla kaavalla

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \quad (13)$$

Jos funktio riippuu vain kahdesta muuttujasta, voidaan viimeinen termi vain jättää pois.

Esimerkki 15. Tarkastellaan vuorta, joka on kutakuinkin funktion $h(x) = -x^4 + x^3 + xy + 3y^2 - y^4 + 3$ muotoinen (kts. kuva 13). Olkoon koordinaatiston yksikkö kilometri. Selvitetään gradientin avulla, mikä on vuoren jyrkkyys koordinaatiston pisteissä $(1,1)$ ja $(-1,-1)$.

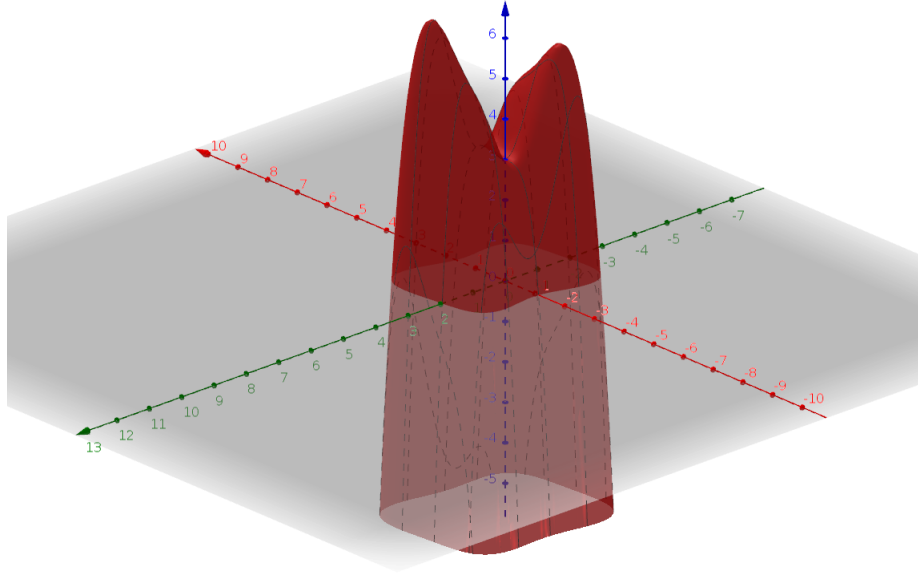
Lasketaan ensin funktion osittaisderivaatat molempien muuttujien suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h(x, y) &= -4x^3 + 3x^2 + y \\ \frac{\partial}{\partial y} h(x, y) &= x + 6y - 4y^3 \end{aligned}$$

Muodostetaan näiden avulla gradienttivektori kaavan (7.1) mukaisesti:

$$\nabla h(x, y) = (-4x^3 + 3x^2 + y) \hat{i} + (x + 6y - 4y^3) \hat{j}$$

Rinteen jyrkkyys voidaan siis määrittää missä tahansa pisteessä sijoittamalla pisteen koordinaatit yllä olevaan vektoriin.



Kuva 13: Funktion $h(x) = -x^4 + x^3 + xy + 3y^2 - y^4 + 3$ kuvaaja muistuttaa kaksihuippuista vuorta.

Nyt gradienttivektorit pyydeytissä pisteissä ovat

$$\nabla h(1, 1) = (-4 + 3 + 1)\hat{i} + (1 + 6 - 4)\hat{j} = 3\hat{j}$$

$$\nabla h(-1, -1) = (4 + 3 - 1)\hat{i} + (-1 - 6 + 4)\hat{j} = 6\hat{i} - 3\hat{j}$$

Ylemmän vektorin pituus on tietysti 3, ja alemman vektorin pituudeksi saadaan $\sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} \approx 6,7$. Rinne on siis tuplasti jyrkempi toisella puolella.

Useamman muuttujan funktiota $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan yleisesti skalaarikentäksi. Esimerkiksi huoneen lämpötilaa voidaan kuvata skalaarikentällä, eli funktiolla $T(x, y, z)$, joka liittää jokaiseen huoneen koordinaattiin kyseisen pisteen lämpötilan. Gradientin avulla voidaan tarkastella, missä kohdassa lämpövirta on suurin. Vastaavalla tavalla voidaan käsitellä esimerkiksi painetta ja kosteutta. Skalaari- ja vektorikentät ovatkin paljon käytössä mm. meteorologiassa.

7.2 Suunnattu derivaatta

Gradientti kertoo meille mihin suuntaan funktion arvot muuttuvat kaikkein eniten, ja lisäksi kuinka nopeasti ne muuttuvat tähän kyseiseen suuntaan. Toisinaan voi olla mielenkiintoisempaa tutkia millä nopeudella funktion arvot muuttuvat tiettyyn suuntaan kuljeltaessa. Tällöin tarvitaan suunnattua derivaattaa, joka voidaan laskea gradientin avulla. Suunnatulla derivaatalla ei ole täysin vakiintunutta merkintää, mutta usein käytetään merkintöjä

$$D_{\bar{e}}f = f'_{\bar{e}}$$

jotka tarkoittavat funktion f derivaattaa yksikkövektorin \bar{e} suunnassa. Suunnattu derivaatta saadaan gradientin avulla laskemalla:

$$D_{\bar{e}}f = \nabla f \cdot \bar{e},$$

missä \cdot tarkoittaa pistetuloa.

Esimerkki 16. Lasketaan funktion $f(x, y) = x^2 + xy$ suunnattu derivaatta kohdassa $(2,3)$ suuntaan $\bar{v} = \hat{i} + 2\hat{j}$.

Muodostetaan gradienttivektori

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} \\ \nabla f(x, y) &= (2x + y) \hat{i} + x \hat{j} \\ \nabla f(2, 3) &= 7 \hat{i} + 2 \hat{j}\end{aligned}$$

Seuraavaksi tarvitaan vektorin $\hat{i} + 2\hat{j}$ suuntainen yksikkövektori, joka saadaan jakamalla vektori pituudellaan.

$$\hat{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \hat{j}$$

Nyt voimme laskea suunnatun derivaatan

$$D_{\hat{v}} f(2, 3) = \nabla f(2, 3) \cdot \hat{v} = \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}.$$