Ristitulo

Tapio Hansson

Ristitulo on kolmiulotteisessa reaaliavaruudessa $\mathbb{R}^3$ määritelty operaatio kahden vektorin välillä. Ristitulon voi määritellä komponenteittain kuten pistetulonkin, mutta selvästi helpompaa on laskea ristitulovektori determinantin avulla. Vektoreiden $\bar{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ ja $\bar{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ välinen ristitulo on:

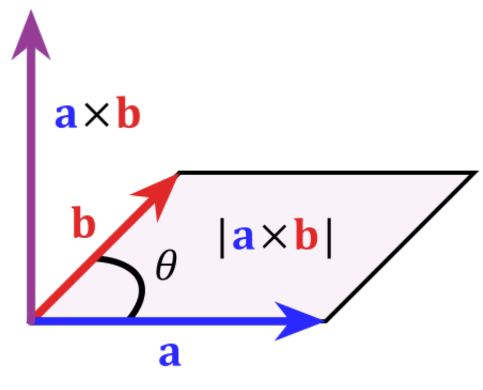
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Toisin kuin pistetulossa, ristitulon tuloksena on edelleen vektori, minkä vuoksi ristituloa kutsutaankin toisinaan vektorituloksi.

Esimerkki 1. Vektoreiden $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ja $\bar{b} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ välinen ristitulovektori on

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k} \end{aligned}$$

Geometrisesti vektori $\bar{a} \times \bar{b}$ on kohtisuorassa molempiin vektoreihin (ja siten niiden määräämään tasoon) nähden. Lisäksi ristitulovektorin pituus on sama kuin $\bar{a}$:n ja $\bar{b}$:n virittämän suunnikkaan pinta-ala. Ristitulovektorin



pituus voidaan laskea geometrisella kaavalla

$$|\bar{a} \times \bar{b}| \ = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta, \tag{2}$$

missä θ on vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma. Kaava antaakin mahdollisuuden laskea vektorien välinen kulma, jos tunnetaan niiden virittämän suunnikkaan pinta-ala.

Esimerkki 2. Vektoreiden $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ja $\bar{b} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ virittämän suunnikkaan ala on niiden välisen ristitulovektorin pituus. Ristitulo laskettiin jo edellä, joten nyt riittää laskea vektorin pituus.

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} \approx 7.35$$

Vektorien välisen kulman voi määrittää sekä pistetulon, että ristitulon avulla. Ristitulosta saadaan

$$\sin\theta = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|} \approx \frac{7,35}{3,74 \cdot 8,77} \approx 0,22,$$

josta kulma

$$\theta = 12,95^\circ$$

Vastaavasti pistetulosta

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta$$

saadaan kosini

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \approx \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{3,74 \cdot 8,77} \approx 0,9756,$$

ja kulmaksi

$$\theta = 12,95^\circ.$$

Ristitulon ominaisuuksia

- Vaihdantalaki ei ole suoraan voimassa. Sen sijaan ristitulon sanotaan olevan *antikommutatiivinen*, eli

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}). \tag{3}$$

- Osittelulaki yhteenlaskun suhteen on sen sijaan voimassa:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}. \tag{4}$$

- Myös reaaliluvulla kertominen toimii kuten pistetulolle:

$$r\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times r\bar{b} = r(\bar{a} \times \bar{b}) \tag{5}$$

- Tulon nollasääntö pätee hieman sovellettuna: Jos $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, on $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 0$ tai sitten $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia ($\sin 0° = \sin 180° = 0$).

Ristitulon käyttö

Koska ristitulo on määritelty vain kolmiulotteisessa avaruudessa, on sillä runsaasti fysiikan sovelluksia. Sitä tarvitaan usein pyörimisen mekaniikassa, sillä voiman momentti on määritelty ristitulon avulla. Samoin sähkömagneettinen Lorenz-voima, joka kohdistuu liikkuvaan varattuun hiukkaseen sähkö- ja magneettikentässä.

Matematiikassa ristituloa voi soveltaa hyvin tason normaalivektorin määrittämiseen, sillä tason minkä tahansa suuntavektoreiden ristitulovektori on aina tason normaalivektori. Tason yksikkönormaali voidaankin määrittää laskemalla ensin ristitulovektori ja jakamalla se pituudellaan:

$$\hat{n} = \frac{\bar{s}_1 \times \bar{s}_2}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}, \tag{6}$$

missä $\hat{n}$ on tason yksikkönormaali ja $\bar{s}_1$ ja $\bar{s}_2$ ovat tason jotkin suuntavektorit.

Edellä mainittu tulon nollasäännön sovellus antaa myös mahdollisuuden tutkia vektoreiden yhdensuuntaisuutta ristitulon avulla, sillä jos molemmat vektorit ovat nollasta poikkeavia, on niiden ristitulo nolla jos ja vain jos vektorit ovat yhdensuuntaiset (saman- tai vastakkaissuuntaiset).

Huomautus: MAOL:n taulukkokirjassa on ristitulo hyvin edustettuna. Siellä ristitulo määritellään geometrisella kaavalla

$$\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}||\,\bar{b}|\ \sin\theta\hat{e}, \tag{7}$$

missä $\hat{e}$ on tason yksikkönormaali.

Tehtäviä

1. Laske vektorien $3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ ja $-\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ välinen ristitulo.
2. Määritä jokin vektorien $4\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ ja $3\hat{k}$ määräämän tason normaalivektori.
3. Laske vektorien $3\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ ja $5\hat{k}$ muodostaman suorakaiteen pinta-ala.
4. Laske kantavektorien väliset ristitulot:
   (a) $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$
   (b) $\hat{\jmath} \times \hat{k}$
   (c) $\hat{k} \times \hat{\imath}$
   (d) $\hat{\jmath} \times \hat{\imath}$
   (e) $\hat{k} \times \hat{\jmath}$
   (f) $\hat{\imath} \times \hat{k}$

   Vinkki: Olisiko ristitulon ominaisuuksista hyötyä?
5. Olkoon $\bar{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ ja $\bar{b} = -3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$. Laske
   (a) $\bar{a} \times 3\bar{b}$
   (b) $\bar{b} \times \bar{a}$
   (c) $(\bar{a} - \bar{b}) \times \bar{b}$
6. Määritä tasolle, joka kulkee pisteiden $A(1, 0, 0)$, $B(2, 1, 1)$ ja $C(2, 1, 2)$ jokin yksikkönormaali.
7. Ovatko vektorit $-2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ ja $18\hat{\imath} - 27\hat{\jmath} + 9\hat{k}$ yhdensuuntaisia?
8. Laske vektorien $\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ ja $\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ välinen kulma.

Vastauksia:

1. $-4\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 8\hat{k}$
2. esimerkiksi $-3\hat{\imath} - 12\hat{\jmath}$
3. 15,81
4. -
5. (a) $-6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 9\hat{k}$
   (b) $2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$
   (c) $-2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$
6. $\sqrt{2}\hat{\imath} - \sqrt{2}\hat{\jmath}$
7. kyllä
8. $\approx 35,3°$