Determinantti ja tason yhtälöt

Tapio Hansson

Determinantti

Determinantti on vektori- ja myöhemmin matriisialgebran kätevä työkalu. Vektorilaskennassa sen avulla voidaan laskea esimerkiksi ristituloja ja tason parametrimuotoisia yhtälöitä.

Determinanttia kannattaa ajatella merkintänä, joka tiivistää pitkän lausekkeen. 2×2-determinantti määritellään:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{1}$$

Yhtälö (1) saattaa näyttää yksinkertaiselta, mutta kun determinanttiin tulee lisää rivejä, pitenee lauseke jo huomattavasti. Yleisimmin tarvittujen 3×3-determinanttien laskemiseen tarvitaan nimittäin 2×2-kokoisia alideterminantteja:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Kokonaan avattuna kolmirivinen determinantti on siis

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

Nelirivisiin determinantteihin tarvittaisiin vastaavasti kolmirivisiä alideterminantteja ja niin edelleen. Suurten determinanttien laskemiseen käytetäänkin yleensä tietokonetta.

Suoran yhtälöt

Suoran parametrimuotoinen yhtälö saadaan kun tunnetaan yksi suoran piste $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja suuntavektori $\bar{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Tällöin se on muotoa

$$\bar{OP} = \bar{OA} + t\bar{v}. \tag{3}$$

Tämä vektorimuotoinen yhtälö pitää sisällään kolmen komponenttiyhtälön ryhmän:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct. \end{cases} \tag{4}$$

Vektoriyhtälöt ovatkin yleinen tapa tiivistää suuria yhtälöryhmiä yhdeksi vektoriyhtälöksi.

Esimerkki 1. Olkoon suoran piste $(1, 2, 3)$ ja suuntavektori $4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$. Tällöin piste on suoralla jos sen koordinaatit (x,y,z) toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tason yhtälö

Tason parametrimuotoinen yhtälö on

$$\bar{OP} = \bar{AP} + t\bar{u} + s\bar{v}. \tag{5}$$

Eli piste P on tasossa, jos se toteuttaa yllä olevan yhtälön, joka riippuu kahdesta parametrista s ja t (vrt. suoran tapauksessa yhdestä parametrista). Tällöin tasosta tunnetaan piste $A(x_1, y_1, z_1)$ ja suuntavektorit $\bar{s_1} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ ja $\bar{s_2} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$.

Toinen tapa kirjoittaa tason yhtälö on determinantin avulla. Eli piste P(x,y,z) on tasossa jos ja vain jos:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Esimerkki 2. Olkoon tason piste $(1, 2, 3)$ ja suuntavektorit $4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ ja $7\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}$. Tällöin tason yhtälö on

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}(x-1)-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}(y-2)-\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}(z-3)=0$$

$$-3(x-1)+6(y-2)-3(z-3)=0$$

$$3x-6y+3z=0.$$

Koska suuntavektorit voidaan määrittää tunnettujen pisteiden avulla, voidaan yhtälö määrätä determinantin avulla myös kun tunnetaan kolme pistettä. Olkoot tason kolme pistettä (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ja (x_3, y_3, z_3) tällöin yhtälö on:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Esimerkki 3. Olkoot kolme pistettä $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ ja $(7, 8, 9)$. Yritetään määrittää tason yhtälö näiden pisteiden kautta:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \\ 7-1 & 8-2 & 9-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}(x-1)-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}(y-2)-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}(z-3)=0$$

$$0=0,$$

Yhtälöä ei muodostu, joten pisteet eivät määrää tasoa.

Tason yhtälölle voidaan kirjoittaa myös parametrimuoto. Käyttämällä aiemmin määriteltyä tunnettua pistettä A ja suuntavektoreita $\bar{s_1}$ ja $\bar{s_2}$ saadaan parametrimuoto vektoriyhtälön komponenteista:

$$\begin{cases} x = x_1 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_1 + sb_1 + tb_2 \\ z = z_1 + sc_1 + tc_2 \qquad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

Tehtäviä

1. Laske determinantti:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Suora kulkee pisteen $A(-1, 2, -3)$ kautta ja suuntavektorina sillä on $2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$. Määritä suoralle parametrimuotoinen yhtälö.

3. Määritä tason yhtälö, joka kulkee pisteiden $(-2, 2, 3)$, $(6, 7, -1)$ ja $(2, 3, 2)$.

4. Onko piste $P(10, -4, -1)$ tasolla, joka kulkee pisteiden $A(2, -2, 3)$, $B(-1, 2, -4)$ ja $C(1, 3, 6)$ kautta?

5. Miksi esimerkissä 3 tasolle ei muodostu yhtälöä, vaikka käytössä on kolme pistettä?

6. Olkoon tason piste $A(1, 0, 4)$ ja suuntavektorit $\bar{s_1} = \hat{i} + 4\hat{k}$ ja $\bar{s_2} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$. Muodosta tasolle parametriyhtälö.

7. Tason parametriyhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + s - t \\ z = -2 - 3s. \end{cases}$$

Määrää tasolle tunnettu piste ja kaksi suuntavektoria.