

MAY1 Välitesti 3 Ratkaisut

1. Määritä lukujonon

- (a) neljä ensimmäistä jäsentä, kun yleinen jäsen on $a_n = \frac{3n}{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \dots$
- (b) 8. ja 17. jäsen, kun yleinen jäsen on $a_n = 4n^2 + 2$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- (c) viisi ensimmäistä jäsentä kun sen ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja muut jäsenet saadaan rekursiivisesti siten, että $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $n = 2, 3, 4, \dots$
- (d) a_5 , kun

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 3a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

- (e) yleinen jäsen, kun lukujono on rekursiivinen ja seuraava luku saadaan summaamalla kolme edellistä lukua.

Ratkaisut:

(a)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3 \cdot 2}{2-1} = \frac{6}{1} = 6 \\ a_2 &= \frac{3 \cdot 3}{3-1} = \frac{9}{2} = 4,5 \\ a_3 &= \frac{3 \cdot 4}{4-1} = \frac{12}{3} = 4 \\ a_4 &= \frac{3 \cdot 5}{5-1} = \frac{15}{4} = 3,75 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} a_8 &= 4 \cdot 8^2 + 2 = 258 \\ a_{17} &= 4 \cdot 17^2 + 2 = 1158 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ a_3 &= 2 \cdot 5 - 1 = 9 \\ a_4 &= 2 \cdot 9 - 1 = 17 \\ a_5 &= 2 \cdot 17 - 1 = 33 \end{aligned}$$

(d)

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3 \cdot 10 + 3 = 33$$

$$a_5 = 3 \cdot 33 + 10 = 109$$

(e)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

2. (a) Määrittele aritmeettinen ja geometrinen lukujono, sekä differenssi ja geometrisen jonon suhdeluku.
- (b) Mikä on aritmeettisen jonon yleinen jäsen, kun ensimmäinen jäsen on 7 ja differenssi 3?
- (c) Mikä on geometrisen jonon yleinen jäsen, kun ensimmäinen jäsen on 7 ja suhdeluku 3?
- (d) Laske

$$\sum_{n=1}^4 n^2 - n.$$

(e) Laske geometrinen summa kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella:

$$72 + 1,07 \cdot 72 + \dots + 1,07^8 \cdot 72.$$

Ratkaisut:

- (a) *Aritmeettinen lukujono* on lukujono, jonka kahden peräkkäisen luvun erotus pysyy samana. Tätä erotusta kutsutaan *differenssiksi*. *Geometrinen lukujono* on lukujono, jonka kahden peräkkäisen luvun suhde on aina sama. Geometrisen lukujonon *suhdeluku* tarkoittaa kahden peräkkäisen lukujonon jäsenen välistä osamäärää.
- (b) Lukujonon differenssi on kolme, eli kun 2. jäsenestä vähennetään ensimmäinen, eli 7 jäljelle jää 3. Näin ollen toisen jäsenen täytyy olla $7 + 3 = 10$. Vastaavasti kolmannen jäsenen ja toisen jäsenen välinen erotus on kolme, eli kolmas jäsen on $10 + 3 = 13$. Toisaalta tämä voidaan ilmaista ensimmäisen jäsenen avulla $7 + 3 + 3 = 13$. Tästä jatkamalla päättelyä voidaan jonon n :s jäsen kirjoittaa lisäämällä ensimmäiseen jäseneseen n kpl kolmosia:

$$a_n = 7 + n \cdot 3 = 3n + 7.$$

(c) Geometrinen lukujono kirjoitetaan yleisessä muodossaan

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Sovelletaan kaavaa annetuilla luvuilla:

$$a_n = 7 \cdot 3^{n-1}.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^4 n^2 - n = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$$

(e)

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 72 \cdot \frac{1 - 1,07^8}{1 - 1,07} \approx 738,7058 \dots$$